

导弹追逃博弈微分对策建模与求解

李龙跃, 刘付显, 史向峰, 王 菊

(空军工程大学 防空反导学院, 西安 710051)

摘 要 针对导弹攻防对抗过程中拦截器追击具备较强机动能力弹头的追逃问题, 建立了双方追逃微分对策模型并给出求解方法. 一是给出导弹追逃质点动力学模型; 二是基于微分对策理论, 建立了导弹攻防对抗微分对策模型, 模型以推力角为控制变量, 高度, 速度和经度角为状态变量, 并考虑了地球重力和自转的影响; 三是针对模型获得解析解的困难, 给出高精度四阶 Gauss-Lobatto 多项式配点法来逼近非线性方程, 通过离散化节点和配点上的状态量和控制量将微分方程组转换为代数约束; 四是为采用配点法求解模型, 给出了将双边最优对策问题转化为单边最优对策问题的具体方法. 最后实例分析对本文研究进行了仿真验证.

关键词 导弹; 追逃系统; 微分对策模型; 配点法

Differential game model and solving method for missile pursuit-evasion

LI Longyue, LIU Fuxian, SHI Xiangfeng, WANG Ju

(Air and Missile Defense College, Air Force Engineering University, Xi'an 710051, China)

Abstract For the pursuit-evasion game of an interception missile (interceptor) pursuit an incoming ballistic missile (warhead), each missile was given a modest post launch capability to maneuver, differential model and solving method of the game was proposed. Firstly, we gave a mass-point dynamics model of the missile pursuit-evasion system. Secondly, based on differential game theory, we established the detailed differential game model of missile pursuit-evasion problem. The model took thrust angle as control variable and flight height, velocity, longitude as state variables, it also considered earth gravity and rotation effects. Thirdly, as differential game can hardly solved analytically, we gave numerical solving method that employed fourth degree Gauss-Lobatto quadrature rule to improve accuracy when compared with lower degree rules such as Simpson's rule, at the nodes and collocation points the values of the state and control were discrete to transform differential equations to algebraic equations. Fourthly, we gave the method able to transform a two-side differential game into a single objective problem. Experimental study verified the model and solving method proposed.

Keywords missile; pursuit-evasion system; differential game model; collocation method

1 引言

导弹攻防对抗技术受到各国重视, 如何有效拦截具备机动能力的弹道导弹目标成为反导武器研制和运用的难点^[1-2]. 未来部分弹道目标和再入飞行器可能具备较强的机动性, 其飞行轨迹将不可预测, 对这类可随意机动的目标, 在很难预知或估计其运动规律的情况下, 不宜直接采用最优控制理论. 由于对另外一方的控

收稿日期: 2015-05-15

作者简介: 李龙跃 (1988-), 男, 河南驻马店人, 博士研究生, 研究方向: 反导火力运用理论与方法, E-mail: lilong-yue@126.com; 刘付显 (1962-), 男, 山东菏泽人, 教授, 博士, 研究方向: 防空反导作战决策优化理论, E-mail: liuxqh@126.com.

基金项目: 全军军事类研究生资助课题

Foundation item: Military Graduate Student Foundation of Army

中文引用格式: 李龙跃, 刘付显, 史向峰, 等. 导弹追逃博弈微分对策建模与求解 [J]. 系统工程理论与实践, 2016, 36(8): 2161-2168.

英文引用格式: Li L Y, Liu F X, Shi X F, et al. Differential game model and solving method for missile pursuit-evasion[J]. Systems Engineering — Theory & Practice, 2016, 36(8): 2161-2168.

制策略不可知, 因此这样一个受两个相互独立因素约束系统的问题属于动态非协同博弈问题. 从博弈论角度看, 导弹攻防对抗含有弹头和拦截器两个对象, 具有相反的作战目的. 拦截器 (追击者, pursuer) 采取追击策略, 力图使目标处于杀伤或捕获范围之内; 弹头目标 (逃逸者, evader) 采取躲避策略, 力图不被拦截器拦截, 双方构成零和追逃博弈. Isaacs 最早阐释和研究了基于微分对策的追逃博弈问题 [3], Bryson 和 Friedman 推导并拓展了微分对策鞍点存在的解析必要条件 [4-5], Breitner 以导弹拦截飞机为追逃对象, 研究了无约束下非线性追逃博弈问题 [6], Raivio 用直接法解决了一类视线范围内飞机追逃博弈问题 [7]. 用微分对策理论分析和求解导弹攻防对抗最优机动策略的研究较少, 比较接近的有文献 [8-9] 等.

追逃博弈问题的求解是个难点, 因其涉及的微分方程比较复杂, 约束条件呈非线性或者耦合状态, 相应的状态量比较多, 寻求解析解困难, 一般是计算其数值解. 对追逃博弈这种非线性微分对策问题, 许多文章侧重于博弈模型的建立及纯粹的数学推导, 较少讨论相对困难的模型的数值求解过程. 求解该类问题目前采用的方法主要有间接法和直接法, 间接法基于极大极小值原理进行求解, 直接法包括只离散控制变量的打靶法和同时离散控制变量和状态变量的配点法 (collocation). 由于用打靶法进行求解时, 对于初值较为敏感, 初值估计不合理会导致无法求解, 因此配点法寻求其数值解是一个可行方法, Johnson 曾具体验证了配点法在微分对策问题求解中的有效性 [10].

本文研究思路为: 首先给出导弹攻防运动的动力学模型, 然后基于微分对策方法重点建立了追逃博弈微分对策模型, 再次为提高求解精度, 采用四阶 Gauss-Labatto 多项式近似法进行数值求解, 并给出模型具体求解思路, 最后对模型和求解方法进行了验证.

2 追逃动力学模型

首先明确以下近似假设: 1) 拦截器与目标相对运动可分为俯仰平面和偏航平面, 本文假设追逃发生在同一 (轨道) 平面内, 三维追逃问题可类比拓展; 2) 考虑地球自转, 忽略大气对二者运动的影响, 地球半径处处相等, 拦截器的机动能力优于目标, 目标具备连续感知拦截的能力而做出规避; 3) 为了方便研究, 二者均可视为点质量模型, 且机动加速度均为常值, 推力值大小不变, 方向角可变; 4) 追逃博弈时间很短, 一旦目标摆脱拦截器捕获将能成功攻击地面目标. 拦截器与弹头目标的相对运动示意图见图 1.

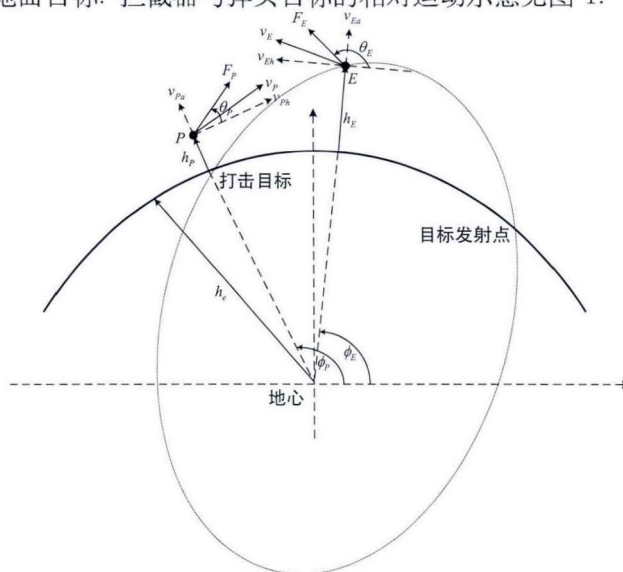


图 1 拦截器与目标的相对运动示意图

用 P 表示拦截器, E 表示弹头目标, v_{Ph}, v_{Pa} 为拦截器飞行速度 v_P 的水平分量和垂直分量, v_{Eh}, v_{Ea} 为目标飞行速度 v_E 的水平分量和垂直分量, h_P, h_E, h_e 为拦截器, 目标离地高度和地球半径, θ_P, θ_E 为二者推力 (加速度) 方向与水平面的夹角, a_P, a_E 为飞行加速度, m_P, m_E 为质量, τ_e 为地球引力常数, 在二者速度的垂直方向上有

$$\begin{aligned} \dot{v}_{Pa} &= a_P \sin \theta_P - \frac{\tau_e - v_{Pa}^2 h_P}{(h_P + h_e)^2}, \quad a_P = \frac{F_P}{m_P}, \quad \dot{h}_P = v_{Pa}, \\ \dot{v}_{Ea} &= a_E \sin \theta_E - \frac{\tau_e - v_{Ea}^2 h_E}{(h_E + h_e)^2}, \quad a_E = \frac{F_E}{m_E}, \quad \dot{h}_E = v_{Ea}. \end{aligned}$$

用 ϕ_P, ϕ_E 分别为二者的经度角, 在二者速度的水平方向上有

$$\begin{aligned} \dot{v}_{Ph} &= \frac{F_P}{m_P} \cos \theta_P - \frac{v_{Ph} v_{Pa}}{h_P + h_e}, \quad \dot{\phi}_P = \frac{v_{Ph}}{h_P + h_e}, \\ \dot{v}_{Eh} &= \frac{F_E}{m_E} \cos \theta_E - \frac{v_{Eh} v_{Ea}}{h_E + h_e}, \quad \dot{\phi}_E = \frac{v_{Eh}}{h_E + h_e}. \end{aligned}$$

拦截器和目标的追, 逃控制向量为 $\mathbf{c} = [\mathbf{c}_P \quad \mathbf{c}_E]^T = [F_P \quad F_E]^T$. 由于假设推力值大小不变, 则控制向量等价于^[9] $\mathbf{c} = [\mathbf{c}_P \quad \mathbf{c}_E]^T \Leftrightarrow \mathbf{c} = [\theta_P \quad \theta_E]^T$. 因此, 拦截器和目标的追, 逃状态向量为 $\mathbf{x}_P = [v_{Ph} \quad v_{Pa} \quad h_P + h_e \quad \phi_P]^T, \mathbf{x}_E = [v_{Eh} \quad v_{Ea} \quad h_E + h_e \quad \phi_E]^T$.

由图 1 中的几何关系有

$$v_{Pa}^2 + v_{Ph}^2 = v_P^2, \quad v_{Ea}^2 + v_{Eh}^2 = v_E^2 \quad (1)$$

令 t_0, t_e 分别为追逃博弈的开始和结束时刻, 规定当拦截器与目标的距离等于某给定捕获距离 s_c 时, 基于假设 2 拦截器恰好能捕获 (拦截) 目标, 即:

$$(h_e + h_P)^2 + (h_e + h_E)^2 - 2(h_e + h_P)(h_e + h_E) \cos(\phi_P - \phi_E) = s_c^2 \quad (2)$$

3 追逃微分对策模型

3.1 微分对策方法

一般微分对策问题, 追逃系统的状态方程为^[9]:

$$\dot{\mathbf{x}}_P = f(\mathbf{x}_P, \mathbf{c}_P, t), \quad \dot{\mathbf{x}}_E = f(\mathbf{x}_E, \mathbf{c}_E, t).$$

其中 $t_0 \leq t \leq t_e$, 问题的边界条件可由一个包含起始约束条件和终端约束条件的向量 ψ 表示

$$\psi = [\mathbf{x}_{P0} \quad \mathbf{x}_{E0} \quad \mathbf{x}_{Pe} \quad \mathbf{x}_{Ee} \quad t_0 \quad t_e]^T = \mathbf{0} \quad (3)$$

问题的目标 (支付) 函数 J 可表示为起始和终端状态, 时间的函数

$$J = f(\mathbf{x}_{P0}, \mathbf{x}_{E0}, \mathbf{x}_{Pe}, \mathbf{x}_{Ee}, t_0, t_e).$$

在追逃问题中, 追击者需要最小化目标函数 J , 而逃逸者需要最大化目标函数 J . 令 $\mathbf{c}_P^*, \mathbf{c}_E^*$ 分别表示追逃双方的最优控制策略, 则有

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{c}_P(t)} \max_{\mathbf{c}_E(t)} J &= \max_{\mathbf{c}_E(t)} \min_{\mathbf{c}_P(t)} J \\ \begin{cases} \mathbf{c}_P(t) = \gamma_P(\mathbf{x}_P, \mathbf{x}_E, t) \\ \mathbf{c}_E(t) = \gamma_E(\mathbf{x}_P, \mathbf{x}_E, t) \\ \mathbf{c}_P^*(t) = \gamma_P^*(\mathbf{x}_P^*(t), \mathbf{x}_E^*(t), t) \\ \mathbf{c}_E^*(t) = \gamma_E^*(\mathbf{x}_P^*(t), \mathbf{x}_E^*(t), t) \end{cases} & (t_0 \leq t \leq t_e) \end{aligned}$$

由于对策双方控制变量独立, 因此该追逃动态系统是分离的, 这也是上式中最小化和最大化可以互换的必要条件^[3], 一般称 $(\mathbf{c}_P^*, \mathbf{c}_E^*)$ 为微分对策的鞍点 (saddle point), Basar 与 Breakwell 给出了鞍点解存在的必要条件^[11-12]. 首先构造哈密顿函数和终端时刻函数

$$H = \lambda_P^T \dot{\mathbf{x}}_P + \lambda_E^T \dot{\mathbf{x}}_E, \quad \Phi = \zeta + \mathbf{v}^T \psi \quad (4)$$

其中哈密顿乘子 $\lambda_P, \lambda_E, \mathbf{v}$ 均为相应的伴随向量, 也称协态向量, 满足以下方程组

$$\begin{cases} \dot{\lambda}_P = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}_P} = -\left[\frac{\partial \dot{\mathbf{x}}_P}{\partial \mathbf{x}_P}\right] \lambda_P \\ \dot{\lambda}_E = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}_E} = -\left[\frac{\partial \dot{\mathbf{x}}_E}{\partial \mathbf{x}_E}\right] \lambda_E \\ \lambda_P(t_0) = -\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{x}_P(t_0)}, \quad \lambda_E(t_0) = -\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{x}_E(t_0)} \\ \lambda_P(t_e) = \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{x}_P(t_e)}, \quad \lambda_E(t_e) = \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{x}_E(t_e)} \end{cases}$$

一个鞍点解必须满足条件

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_P &= \arg \min_{\mathbf{c}_P} H = \arg \min_{\mathbf{c}_P} (\lambda_P^T \dot{\mathbf{x}}_P) \\ \mathbf{c}_E &= \arg \max_{\mathbf{c}_E} H = \arg \max_{\mathbf{c}_E} (\lambda_E^T \dot{\mathbf{x}}_E) \end{aligned} \quad (5)$$

即需要满足一阶和二阶条件

$$\begin{cases} \left[\frac{\partial H}{\partial c_P} \right]^T = \left[\frac{\partial \dot{x}_P}{\partial c_P} \right]^T \lambda_P = 0, \quad \frac{\partial^2 H}{\partial c_P^2} \geq 0 \\ \left[\frac{\partial H}{\partial c_E} \right]^T = \left[\frac{\partial \dot{x}_E}{\partial c_E} \right]^T \lambda_E = 0, \quad \frac{\partial^2 H}{\partial c_E^2} \leq 0 \end{cases} \quad (6)$$

未指定起始时刻和未指定终端时刻时微分对策问题的横截条件分别为

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t_0} - H(t_0) = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial t_e} + H(t_e) = 0 \quad (7)$$

根据导弹攻防态势和机动性能, 将对策空间划分为捕获区和逃逸区: 在捕获区, 如果追击者采取最优机动策略, 不论逃逸者如何机动都将被拦截; 在逃逸区, 如果逃逸者采取最优机动策略, 不论追击者如何机动都能逃脱拦截. 捕获区和逃逸区的分界称为界栅 (barrier)^[3], 界栅的实质是追逃双方在中立结局下的轨迹, 导弹攻防是一个只关心追逃目的是否达成的定性追逃问题, 界栅就是微分对策的解. 文献 [3] 给出了对策空间中某点属于捕获区的判断方法

$$\frac{\partial \psi(t_e)}{\partial x_P(t_e)} f[x_P(t_e), c_P(t_e), t_e] \leq - \frac{\partial \psi(t_e)}{\partial x_E(t_e)} f[x_E(t_e), c_E(t_e), t_e] \quad (8)$$

3.2 导弹攻防微分对策模型

本节将 3.1 节中的微分对策方法具体的应用到导弹追逃博弈问题中. 首先, 导弹攻防对抗中追逃系统状态向量和状态向量的伴随向量分别记成

$$\begin{aligned} x_P &= [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4]^T, \quad \lambda_P = [\lambda_1 \ \lambda_2 \ \lambda_3 \ \lambda_4]^T, \\ x_E &= [x_5 \ x_6 \ x_7 \ x_8]^T, \quad \lambda_E = [\lambda_5 \ \lambda_6 \ \lambda_7 \ \lambda_8]^T. \end{aligned}$$

其次, 由追逃动力学模型知, 双方的状态微分方程组为

$$\dot{x}_P = \begin{bmatrix} a_P \cos \theta_P - \frac{v_{Ph} v_{Pa}}{h_P + h_e} \\ a_P \sin \theta_P - \frac{\tau_e - v_{Pa}^2 h_P}{(h_P + h_e)^2} \\ v_{Pa} \\ \frac{v_{Ph}}{h_P + h_e} \end{bmatrix}, \quad \dot{x}_E = \begin{bmatrix} a_E \cos \theta_E - \frac{v_{Eh} v_{Ea}}{h_E + h_e} \\ a_E \sin \theta_E - \frac{\tau_e - v_{Ea}^2 h_E}{(h_E + h_e)^2} \\ v_{Ea} \\ \frac{v_{Eh}}{h_E + h_e} \end{bmatrix}.$$

由式 (4) 知, 追逃双方的伴随状态微分方程组为

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_P &= - \frac{\partial H}{\partial x_P} = \begin{bmatrix} -\frac{2v_{Ph}\lambda_1 + v_{Pa}\lambda_2 - \lambda_4}{h_P + h_e} \\ \frac{\lambda_2 v_{Ph}}{h_P + h_e} - \lambda_3 \\ \frac{v_{Ph}^2 \lambda_1 - v_{Pa} v_{Ph} \lambda_2 + v_{Ph} \lambda_4}{(h_P + h_e)^2} - \frac{2\tau_e \lambda_1}{(h_P + h_e)^3} \\ 0 \end{bmatrix}, \\ \dot{\lambda}_E &= - \frac{\partial H}{\partial x_E} = \begin{bmatrix} -\frac{2v_{Eh}\lambda_5 + v_{Ea}\lambda_6 + \lambda_8}{h_E + h_e} \\ \frac{\lambda_6 v_{Eh}}{h_E + h_e} - \lambda_7 \\ \frac{v_{Eh}^2 \lambda_5 - v_{Ea} v_{Eh} \lambda_6 - v_{Eh} \lambda_8}{(h_E + h_e)^2} - \frac{2\tau_e \lambda_5}{(h_P + h_e)^3} \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

再次, 根据式 (6) 中的一阶最优性条件, 得

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial c_P} = 0 &\rightarrow a_P(\lambda_2 \cos \theta_P - \lambda_1 \sin \theta_P) = 0, \\ \theta_P(1) &= \arctan\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right), \quad \theta_P(2) = \arctan\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right) + \pi, \\ \frac{\partial H}{\partial c_E} = 0 &\rightarrow a_E(\lambda_6 \cos \theta_E - \lambda_5 \sin \theta_E) = 0, \\ \theta_E(1) &= \arctan\left(\frac{\lambda_6}{\lambda_5}\right), \quad \theta_E(2) = \arctan\left(\frac{\lambda_6}{\lambda_5}\right) + \pi. \end{aligned}$$

根据式 (6) 中的二阶最优性条件, 得

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 H}{\partial c_P^2} &= a_P(-\lambda_2 \cos \theta_P - \lambda_1 \sin \theta_P) \geq 0 \\ \frac{\partial^2 H}{\partial c_E^2} &= a_E(-\lambda_6 \cos \theta_E - \lambda_5 \sin \theta_E) \leq 0\end{aligned}\quad (9)$$

利用二阶式 (9) 可以判断一阶最优性条件中 θ_P, θ_E 的具体取值. 令地球自转的角速度为 ϑ_e , 根据式 (5) 给出伴随变量的终端边界条件

$$\begin{aligned}\lambda_P(t_e) &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2v_2 \{(h_P + h_e) - (h_E + h_e) \cos(\phi_P - \phi_E)\} \\ -2v_2(h_P + h_e)(h_E + h_e) \sin(\phi_P - \phi_E) \end{bmatrix} \\ \lambda_E(t_e) &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2(h_E + h_e) + 2h_e \cos[\phi_E - \phi_E(t_0) - \vartheta_e(t_e - t_0)] + 2v_2 \{(h_E + h_e) - (h_P + h_e) \cos(\phi_P - \phi_E)\} \\ -2(h_E + h_e)h_e \sin[\phi_E - \phi_E(t_0) - \vartheta_e(t_e - t_0)] + 2v_2(h_E + h_e)(h_P + h_e) \sin(\phi_P - \phi_E) \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

由于博弈结束时刻 t_e 不确定, 根据式 (7) 得横截条件为

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t_e} = 2(h_P + h_e)h_e \vartheta_e \sin[\phi_E - \phi_E(t_0) - \vartheta_e(t_e - t_0)].$$

根据式 (1), (2) 可以得到追逃博弈问题的边界条件向量 ψ

$$\psi = \begin{bmatrix} x_1^2(t_0) + x_2^2(t_0) = v_P^2(t_0) \\ x_1^2(t_0) + x_2^2(t_0) = v_E^2(t_0) \\ x_7^2(t_e) + x_3^2(t_e) - 2x_7(t_e)x_3(t_e) \cos[x_4(t_e) - x_8(t_e)] = s_c^2 \end{bmatrix}.$$

最后, 基于式 (2) 可设定拦截器与目标的距离为导弹攻防作战的目标 (支付) 函数 J , 则整个追逃博弈的目标函数为

$$J = \sqrt{\min_{\theta_P(t)} \max_{\theta_E(t)} J} = \sqrt{x_3^2(t_e) + x_7^2(t_e) - 2x_3(t_e)x_7(t_e) \cos[x_4(t_e) - x_8(t_e)]}.$$

根据式 (8), 可以给出追逃对策空间中的某点是否属于捕获区的判断方法

$$x_2x_3 + x_6x_7 - x_7[x_1 \sin(x_4 - x_8) + x_2 \cos(x_4 - x_8)] - x_3[x_5 \sin(x_4 - x_8) + x_6 \cos(x_4 - x_8)] \leq 0.$$

4 四阶 Gauss-Labatto 配点法

配点法也叫多项式匹配法, 其思路是将求解区间分段, 用特定多项式来逼近非线性方程, 并对多项式求导来近似状态变量对时间的导数, 最后将微分方程组转换为代数约束, 降低非线性规划问题复杂程度, 状态量是拟合出来的, 不需要对动力学方程进行积分. 标准配点法主要是基于三阶 Simpson 积分方法^[13]对微分方程和参数进行离散化处理, 在分段数较少时求解精度较低, 为了提高拟合精度, 一般有两种途径: 一是增加分段数, 减小离散化的误差; 二是使用更高阶积分方法 (比如四阶). 本文采用四阶 Gauss-Labatto 积分函数进行拟合, 以提高求解精度, 可分为两个步骤: 一是时间点的选取; 二是近似多项式的设置.

首先将整个追逃博弈过程时间 $[t_0, t_e]$ 分成 n 段

$$[t_0, t_1], [t_1, t_2], \dots, [t_{n-1}, t_n] (t_n = t_e).$$

令所有时间段的长度均等于 Δt (等距节点)

$$\Delta t = \frac{t_e - t_0}{n}.$$

对每个时间段 $[t_{i-1}, t_i] (i = 1, 2, \dots, n)$, 指定三个离散时间点 $t_{i-1}, t_{mi}, t_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 分别为该时间段的起始, 中间和结束时间点, 则 $x(t_{i-1}), x(t_i)$ 为时间点上对应的状态变量; $f(t_{i-1}), f(t_i)$ 为时间点上对应状态变量的时间导数, 即 $f = \partial x(t)/\partial t$; $c(t_{i-1}), c(t_i)$ 为时间点上控制变量的取值. 四阶 Gauss-Labatto 积分相比三阶 Simpson 积分在每个时间段增加了 t_1, t_2 两个配点以提高精度, 如图 2.

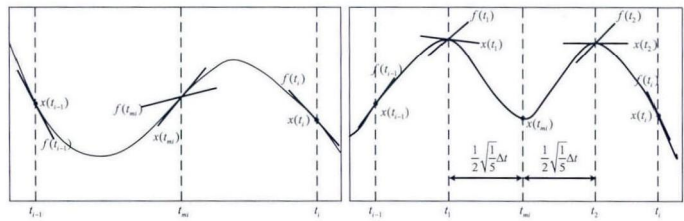


图 2 三阶 Simpson 和四阶 Gauss-Labatto 积分多项式约束

其次, 为方便表示, 令每个时间段 t_{i-1}, t_i 上的配点表示为 $t_{i1}, t_{i2}(i = 1, 2, \cdots, n)$, 则对于四阶 Gauss-Labatto 积分, t_{i1}, t_{i2} 和 t_{mi} 分别为

$$t_{mi} = \frac{t_{i-1} + t_i}{2}, \quad t_{i1} = t_{mi} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{5}}\Delta t, \quad t_{i2} = t_{mi} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{5}}\Delta t.$$

$x(t_{i1})$ 和 $x(t_{i2})$ 是 $x(t)$ 在 t_{i1}, t_{i2} 处的多项式逼近, 由拟合多项式插值得到, 分别为^[13]

$$x(t_{i1}) = \frac{1}{50} \left\{ \begin{aligned} &(7\sqrt{5} + 9)x(t_{i-1}) + 32x(t_{mi}) + (-7\sqrt{5} + 9)x(t_i) + \\ &\Delta t [(\sqrt{5} + 1)f(t_{i-1}) + (\sqrt{5} - 1)f(t_i)] \end{aligned} \right\},$$
$$x(t_{i2}) = \frac{1}{50} \left\{ \begin{aligned} &(-7\sqrt{5} + 9)x(t_{i-1}) + 32x(t_{mi}) + (7\sqrt{5} + 9)x(t_i) + \\ &\Delta t [(-\sqrt{5} + 1)f(t_{i-1}) + (-\sqrt{5} - 1)f(t_i)] \end{aligned} \right\}.$$

用 $x(t_{i-1}), x(t_{mi}), x(t_i)$ 及 $f(t_{i-1}), f(t_i)$ 构造多项式 (含五个系数, 这五个系数分别为在每个时间段上的起始, 中间, 结束时刻的状态值和开始, 结束状态对时间的导数值), 要实现多项式对状态导数的近似, 需要令配点处的 $\dot{x}(t)$ 等于 $f(t)$, 因此, 在每一个时间段上, 构造的多项式在 t_{i1}, t_{i2} 满足静态约束:

$$\chi_{i1} = \dot{x}(t_{i1}) - f(t_{i1}) = 0, \chi_{i2} = \dot{x}(t_{i2}) - f(t_{i2}) = 0.$$
$$\chi(t_{i1}) = \frac{1}{120} \left\{ \begin{aligned} &(32\sqrt{5} + 60)x(t_{i-1}) + (32\sqrt{5} - 60)x(t_i) - 72\sqrt{5}x(t_{mi}) + \\ &\Delta t [(5 + 3\sqrt{5})f(t_{i-1}) + 50f(t_{i1}) + (5 - 3\sqrt{5})f(t_i)] \end{aligned} \right\} = 0.$$
$$\chi(t_{i2}) = \frac{1}{120} \left\{ \begin{aligned} &(-32\sqrt{5} + 60)x(t_{i-1}) + (-32\sqrt{5} - 60)x(t_i) + 72\sqrt{5}x(t_{mi}) + \\ &\Delta t [(5 - 3\sqrt{5})f(t_{i-1}) + 50f(t_{i2}) + (5 + 3\sqrt{5})f(t_i)] \end{aligned} \right\} = 0.$$

追逃双方的状态向量 c 各包含 4 个状态变量, 因此上面两式各包含 $8n$ 个约束. $c(t_{i1}), c(t_{i2})$ 可由 $c(t_{i-1}), c(t_i)$ 对时间插值得到, $x(t_{i1})$ 和 $x(t_{i2})$ 可确保构造的多项式具有同类多项式中的较高的拟合精度.

5 求解思路

由第 2 节可知导弹攻防对抗中的追逃博弈是一个双边最优对策问题, 但配点法求解非线性规划问题只能求得单边 (单目标) 最优, 因此需要将双边最优对策问题转化成单边最优对策问题, 过程如下^[9,14]:

基于式 (6) 中逃逸者最优机动满足的一阶和二阶条件, 逃逸者的控制向量 c_E 可写成关于状态向量 x_E , 伴随向量 λ_E 和时间 t 的函数

$$c_E = f_E(x_E, \lambda_E, t).$$

然后追逃博弈系统中只存在追击者的控制向量 c_P , 记为系统控制向量 $\tilde{c} = c_P$, 将逃逸者的状态伴随向量引入到系统的状态向量 \tilde{x} , 即

$$\tilde{x}(t) = [x_P^T(t) \quad x_E^T(t) \quad \lambda_E^T(t)]^T.$$

则有

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}(t) &= \left[\begin{array}{ccc} f_P^T(x_P, c_P, t) & f_E^T(x_E, c_E, t) & -\left[\frac{\partial \dot{x}_E}{\partial x_E}\right] \lambda_E^T \end{array} \right]^T \\ &= \left[\begin{array}{ccc} f_P^T(x_P, c_P, t) & f_E^T(x_E, \lambda_E, t) & -\left[\frac{\partial \dot{x}_E}{\partial x_E}\right] \lambda_E^T \end{array} \right]^T = \tilde{f}. \end{aligned}$$

由于拓展后的系统状态向量包含了逃逸者的伴随向量, 式 (3) 对应的终端约束条件也要增加相应项

$$\tilde{\psi} = [\psi^T \quad \psi_k^T]^T.$$

式 (4) 对应的拓展后哈密顿函数和终端时刻函数分别为

$$\tilde{H} = \tilde{\lambda}^T \tilde{f} = [\lambda_P \quad \lambda_E \quad \lambda_\lambda]^T \tilde{f} = \lambda_P^T f_P + \lambda_E^T f_E - \lambda_\lambda^T \left[\frac{\partial f_E}{\partial x_E} \right] \lambda_E,$$
$$\tilde{\Phi} = \zeta + \tilde{v}^T \tilde{\psi} = \zeta + [\ v \quad v_k]^T [\ \psi \quad \psi_k] = \zeta + v\psi + v_k\psi_k.$$

综上, 首先将逃逸者的控制向量 c_E 可用状态向量 x_E , 伴随向量 λ_E 和时间 t 表示, 其次再把伴随向量加入到系统的状态向量, 把 3.1 节中的追逃博弈双边最优控制问题转化为了以下单边最优控制问题

$$\min_{\tilde{c}(t)} J \quad \text{s.t.} \quad \begin{cases} \dot{\tilde{x}}(t) = \tilde{f} \\ \tilde{\psi} = 0 \end{cases}$$

经过上述转化, 问题已变为非线性规划问题, 可使用配点法进行近似数值求解, 求解过程中可用 Matlab 中的 SNOPT 软件包^[15]. 计算出 $\tilde{x}_{i-1}, \tilde{x}_{mi}, \tilde{x}_i (i = 1, 2, \cdots, n)$ 和 $\tilde{u}_{i-1}, \tilde{u}_{i1}, \tilde{u}_{i2}, \tilde{u}_i (i = 1, 2, \cdots, n)$ 后, 再计算得 $\tilde{f}_{i-1}, \tilde{f}_i (i = 1, 2, \cdots, n)$, 最终系统状态变量可由四阶多项式插值得到.

6 实例分析

根据计算的需要, 仿真实例需给出部分参数初值和中间值: 地球半径 h_e 为 6371km, $t_0 = 0$ 时刻, 拦截器和弹头 t_0 时刻经度 ϕ_P, ϕ_E 为 103° 和 85° , 拦截器和弹头离地高度 $h_P(t_0), h_E(t_0)$ 分别为 60km 和 240km, 拦截器和弹头 t_0 时刻速度为 2200m/s 和 3500m/s, 拦截器和弹头 t_0 时刻推力角度 θ_P, θ_E 为 15.1° 和 101° , 地球自转角速度 ϑ_e 为 $7.292 \times 10^{-5}\text{rad/s}$, 捕获距离 s_c 为 15km, 地心引力常数 τ_e 为 $398600.5\text{km}^3/\text{s}^2$, 配点个数设置为 3600 个 (约为估计终端时刻的 10 倍), 拦截器和弹头的加速度大小 a_P, a_E 分别为 15g 和 5g, 即 $F_P/m_P \approx 3F_E/m_E, g = 9.8 \times 10^{-3}\text{km/s}^2$.

图 3, 图 4 和图 5 分别是拦截器和弹头追逃双方的经度, 离地高度和推力角随时间变化的仿真结果, 追逃双方的水平速度和垂直速度变化情况可分别对经度和离地高度变化进行求导即可, 在此不再列出. 从仿真图可见本文的配点法求解微分对策模型收敛, 在对策时间 345 秒时, 拦截器对弹头成功拦截, 图 5 表明追逃双方的推力角变化情况基本一致, 这一结论与前面的假设 (1) 有关.

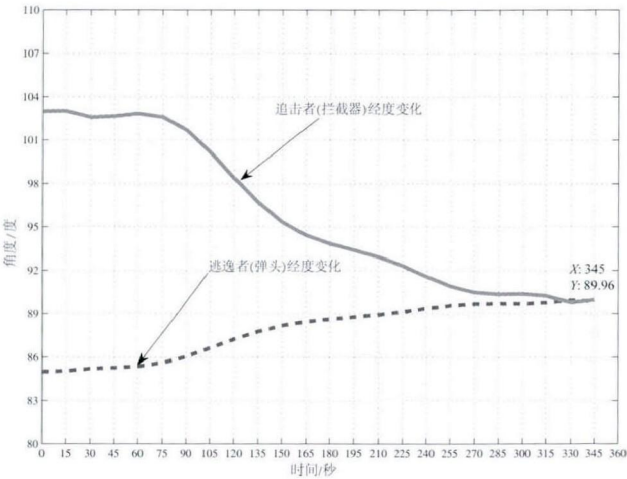


图 3 追逃双方经度 ϕ_P, ϕ_E 随时间变化

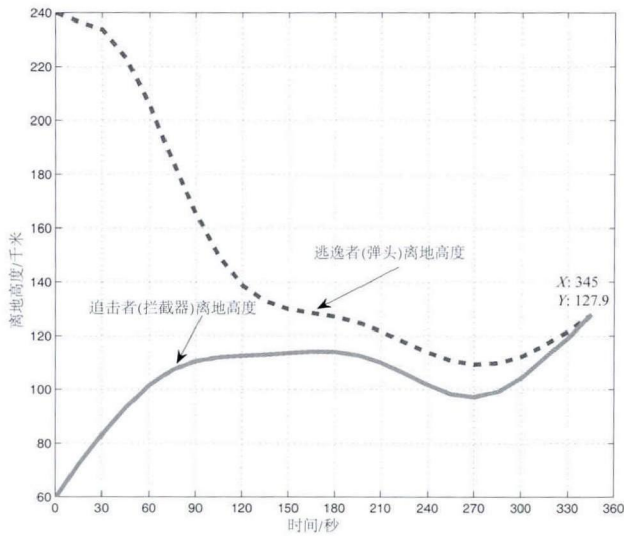


图 4 追逃双方离地高度 h_P, h_E 随时间变化

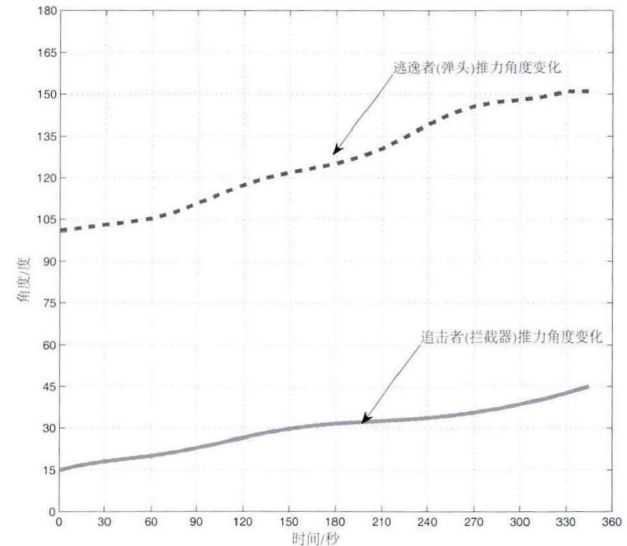


图 5 追逃双方推力角 θ_P, θ_E 随时间变化

7 结论

论文模型和实例中只考虑了与地心共面的情况, 经度为地球面上一点与两极的连线与 0 度经线所在平面的夹角, 同一经度, 不同纬度的追逃运动和微分对策模型是基本一致的, 只是参考的坐标原点不再是地心, 而且部分参数值发生变化. 应用微分对策方法建立导弹攻防对抗追逃博弈模型对解决飞行器机动决策和轨迹优化等问题有一定启发; 采用高阶配点法近似求解, 精度更高, 也更容易收敛, 同时配点对初值不敏感, 求解过程有一定实时性.

本文研究基于的一些假设, 如机动共面, 推力大小不变和忽略大气影响等, 尤其是假设目标具备连续感知拦截的能力而做出规避, 这一点对于导弹攻防问题来说研究的起点过于理想, 但对于防御方, 能够考虑最坏的情况 (worst-case scenario) 来生成机动对策, 仍然具有十分积极的意义. 本文对于导弹追逃博弈问题建模和求解的思路是个起点, 从横向平面来看, 追逃动力方程完全不同, 但微分决策建模方法是一致的, 下一步的研究可拓展到三维平面内多个导弹的追逃博弈^[16]问题.

参考文献

- [1] 李龙跃, 刘付显, 赵麟锋. 对多波次目标直接分配到弹的反导火力规划方法 [J]. 系统工程与电子技术, 2014, 36(11): 2206-2211.
Li L Y, Liu F X, Zhao L F. Direct interceptor allocation method in antimissile firepower planning for multiple wave targets [J]. Systems Engineering and Electronics, 2014, 36(11): 2206-2211.
- [2] 肖金科, 王刚, 李为民, 等. 区域反导目标分配模型优化分析 [J]. 系统工程理论与实践, 2015, 35(4): 1027-1034.
Xiao J K, Wang G, Li W M, et al. Optimization on target assignment model in theater anti-missile system[J]. Systems Engineering — Theory & Practice, 2015, 35(4): 1027-1034.
- [3] Isaacs R. Differential games[M]. New York: John Wiley & Sons, 1965.
- [4] Bryson A E, Ho Y C. Applied optimal control[M]. New York: Hemisphere, 1975.
- [5] Friedman A. Differential games[M]. Rhode Island: American Mathematical Society, 1974.
- [6] Breitner M H, Pesch H J, Grimm W. Complex differential games of pursuit-evasion type with state constraints [J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 1993, 78(3): 419-441.
- [7] Raivio T, Ehtamo H. Visual aircraft identification as a pursuit-evasion game[J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2000, 23(4): 701-708.
- [8] Shima T, Shinar J. Time-varying linear pursuit-evasion game models with bounded controls[J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2002, 25(3): 425-432.
- [9] Pontani M, Conway B A. Optimal interception of evasive missile warheads: Numerical solution of the differential game [J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2008, 31(4): 1112-1122.
- [10] Johnson P A. Numerical solution methods for differential game problems[D]. Boston: Massachusetts Institute of Technology, 2009.
- [11] Basar T, Olsder G J. Dynamic noncooperative game theory[M]. New York: Academic Press, 1995.
- [12] Breakwell J V, Merz A W. Minimum required capture radius in a coplanar model of the aerial combat problem[J]. AIAA Journal, 1977, 15(8): 1089-1094.
- [13] Herman A L, Conway B A. Direct optimization using collocation based on high-Order Gauss-Lobatto quadrature rules[J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 1996, 19(3): 592-599.
- [14] 李龙跃, 刘付显, 史向峰, 等. 导弹攻防对抗中追逃对策模型与配点求解法 [J]. 系统工程与电子技术, 2016, 38(5): 1075-1081.
Li L Y, Liu F X, Shi X F, et al. Differential modeling and collocation solving method of missile pursuit-evasion game [J]. Systems Engineering and Electronics, 2016, 38(5): 1075-1081.
- [15] Philip E, Murray G W. SNOPT: An SQP algorithm for large scale constrained optimization[J]. SIAM Review, 2005, 47(1): 99-131.
- [16] 叶继坤, 雷虎民, 薛东风, 等. 基于几何关系的多导弹协同跟踪算法 [J]. 系统工程理论与实践, 2012, 32(10): 2332-2338.
Ye J K, Lei H M, Xue D F, et al. Multiple missiles cooperative tracking algorithm base on geometric relation[J]. Systems Engineering — Theory & Practice, 2012, 32(10): 2332-2338.